

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО
МАТЕМАТИКЕ**

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

11-й класс

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит выполнить теоретические задания.

Время выполнения заданий – 235 минут.

Выполнение заданий целесообразно организовать следующим образом:

- не спеша, внимательно прочитайте задания;
- не забывайте переносить решения в чистовик, черновики не проверяются;
- решение каждой задачи начинайте с новой страницы;
- задача считается решённой, если в ней приведено полное доказательство или обоснование ответа (за исключением случаев, когда в условии написано, что требуется привести только ответ);
- после выполнения заданий ещё раз удостоверьтесь в правильности записанных ответов и решений.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Итог подводится по сумме баллов, набранных участником.

Условия задач

11.1. Определите количество корней уравнения $\operatorname{tg} \pi x \cdot \sin \pi x = \operatorname{tg} \pi x$, принадлежащих отрезку $[0; 2023]$.

11.2. На берегу круглого озера находятся четыре пристани: K, L, P, Q . От пристани K отплывает катер, движущийся с постоянной скоростью, а от пристани L – лодка, которая также движется с постоянной скоростью. Если катер поплывёт прямо к P , а лодка к Q , то они встретятся в некоторой точке X озера. Докажите, что если катер поплывет к Q , а лодка к P , то они достигнут этих пристаней одновременно.

11.3. Пусть AD – медиана треугольника ABC . Чему равен угол A , если известно, что $4 \cdot AD^2 \cdot BC^2 = AB^4 + AC^4$?

11.4. Функция f такова, что для всех действительных x выполняется равенство: $f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2} f(x)$. Докажите, что функция f является периодической функцией. Найдите её период. Приведите пример такой функции.

11.5. Президент акционерного общества «Не обманешь – не продашь» объявил на собрании акционеров, что за каждые пять последовательных месяцев расход фирмы превышал доход, а за весь год доход фирмы всё же превысил расход. Могло ли такое быть?