ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

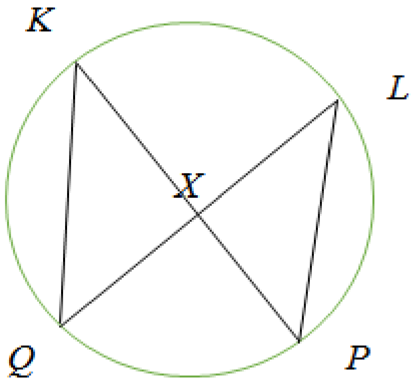
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

11 класс

Решения задач.

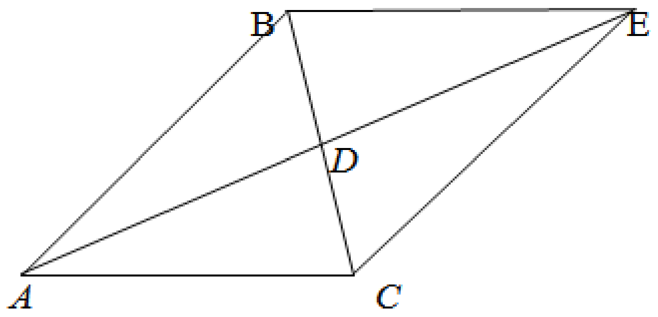
11.1. Данное уравнение равносильно уравнению $tg\ \pi x \cdot sin\pi x - tg\pi x = 0$, которое равносильно уравнению $tg\ \pi x \cdot (sin\pi x\ -1) = 0$. Последнее уравнение равносильно совокупности уравнений: $\mathrm{tg}\ \pi x = 0$ и $sin\pi x = 1$ при условии, что $\cos \pi x \neq 0$. Решением первого уравнения будет $x = n$, где n – целое. Решением второго уравнения будет $x = \frac{1}{2} + 2k$, где k - целое. Учитывая, что решением неравенства $\cos \pi x \neq 0$ является $x \neq \frac{1}{2} + m$, где m - целое, получим решение исходного уравнения $x = n$, где n – целое. Так как в отрезке [0; 2023] содержится 2024 целых числа, то ответом будет 2024.
Ответ: 2024.

11.2. Обозначим скорость катера за u, а скорость лодки за v. Возможное расположение пристаней, удовлетворяющее условию задачи, приведено на рисунке.



Так как треугольники KXQ и LXP подобны по двум углам, то $\frac{KX}{LX}=\frac{KQ}{LP}$. Так как катер и лодка достигают точки X одновременно, то $\frac{KX}{u} = \frac{LX}{v}$. Из данных двух равенств получим, что $\frac{KQ}{LP} = \frac{u}{v}$, откуда получим $\frac{KQ}{u} = \frac{LP}{v}$. Таким образом, время достижения катером и лодкой пристаней Q и P будет одинаково.

11.3. Пусть $AD = m$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Выполним дополнительное построение: продлим медиану AD до точки E так, что $DE = AD = m$ (смотри рисунок).



Полученный четырехугольник $ABEC$ является параллелограммом (его диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам). Так как сумма квадратов сторон параллелограмма равна сумме квадратов его диагоналей, имеем: $4m^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$. Из данного равенства выразим $4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$ и подставим в исходное соотношение, тогда получим: $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 = 0$. Преобразуем последнее равенство к виду: $(b^2 + c^2 - a^2)^2 = 2b^2c^2$, которое равносильно совокупности двух равенств: $b^2+c^2-a^2 = \sqrt{2}bc$ и $b^2+c^2-a^2 = -\sqrt{2}bc$. Выразив из данных равенств a^2 получим:

$a^2 = b^2+c^2 - 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}bc$ или $a^2 = b^2+c^2 + 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}bc$. По теореме косинусов получаем, что $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\cos A = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то есть $\angle A = 45°$ или $\angle A = 135°$.

Ответ: 45° или 135°.

Замечание: если рассмотрены оба случая, все решение верное, выставляется 7 баллов; если рассмотрен только один случай - 5 баллов; в решении определено, что имеется два случая, при этом рассмотрен один - 6 баллов.

11.4. Так как для любого действительного x выполняется равенство

$$f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2}\, f(x),$$

то будет справедливо и такое равенство:

$$f(x + 2) + f(x) = \sqrt{2}\, f(x+1),$$ которое преобразуем к равенству:

$$f(x + 2) + f(x) = \sqrt{2}(\sqrt{2}\, f(x) - f(x - 1)).$$

Раскрыв скобки в правой части, получим равенство:

$$f(x + 2) + f(x) = 2f(x) - \sqrt{2}f(x - 1)).$$

Из данного равенства получим, что $f(x + 2) = f(x) - \sqrt{2}f(x - 1)$.

Поэтому $f(x + 4) = f(x + 2) - \sqrt{2}f(x + 1)$. Подставим в это равенство $f(x + 2)$ и учитывая условие, получим: $f(x + 4) = f(x) - \sqrt{2}f(x - 1) - \sqrt{2}f(x + 1) = - f(x)$. Следовательно, $f(x + 8) =- f(x + 4) = f(x)$.

Таким образом, $f(x + 8) = f(x)$ для любого действительного числа, поэтому f - периодическая функция, период которой равен 8. Примером такой функции является функция $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$.

Ответ: $T = 8$, $f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}$.

11.5. Такое могло быть. Приведем пример: 2; 2; 2; 2; -9; 2; 2; 2; 2; -9; 2; 2. Здесь выписаны подряд (с учетом знака) разности между доходами и расходами фирмы (сальдо) за каждый месяц года. Как видно из примера, сумма любых пяти последовательных чисел отрицательна (равна -1), а в целом за год сумма всех чисел положительна (равна 2).

Замечание. Можно привести и другие примеры. Например, 3; 3; 3; 3; -13; 3; 3; 3; 3; -13; 3; 3

Ответ: Да.